VETTORI E MATRICI

Concetti introduttivi e applicazioni alla grafica 3D

Parte III

di Daniele Petraccini

Nei primi due numeri abbiamo discusso i principali concetti matematici che stanno alla base della geometria dello spazio: vettori, sistemi di riferimento e coordinate cartesiane di un punto; abbiamo inoltre introdotto le trasformazioni geometriche, discutendo in particolare le traslazioni. In questo numero trattiamo un altro tipo fondamentale di trasformazioni: le rotazioni. Per una migliore comprensione, tale argomento viene preceduto da una panoramica sulle matrici, che rappresentano uno strumento matematico di fondamentale importanza nell'ambito della grafica 3D.

MATRICI

Una *matrice* A è una tabella ordinata di numeri reali, detti *elementi* della matrice, disposti su m righe ed n colonne, e rappresentati fra due parentesi quadre:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Come si può notare, gli elementi di una matrice sono caratterizzati da due indici: in generale il simbolo a_{ij} identifica l'elemento che si trova nell'intersezione tra la riga i-esima e la colonna j-esima della matrice A. Nel seguito dell'articolo tutte le matrici saranno denotate con lettere maiuscole (A, B, C, …).

Una matrice avente un numero di righe diverso dal numero di colonne viene definita *rettangolare*. L'esempio seguente mostra una matrice rettangolare A, avente *dimensione* 2×3 (ovvero costituita da 2 righe e 3 colonne):

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 3/5 & 0 \\ 1 & -7 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

L'elemento a_{11} è il numero reale –8, l'elemento a_{12} è il numero reale 3/5, e così via, fino all'elemento a_{23}, che vale 1/3.

Esistono due casi particolari di matrici rettangolari:

- una matrice avente 1 sola riga ed n colonne viene detta *matrice riga*
- una matrice avente m righe ed 1 sola colonna viene detta *matrice colonna*.

Qui di seguito si mostra un esempio per ciascuno dei due tipi (B: matrice riga; C: matrice colonna):

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Nell'ambito della *computer graphics* assumono un particolare significato le matrici *quadrate*, caratterizzate dall'avere un numero di righe pari al numero di colonne. Ad esempio, l'uguaglianza sottostante definisce D come una matrice quadrata di *ordine* 3 (ovvero m = n = 3):

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 5/8 & 1 \\ 8 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Come visto nello spazio dei vettori e nello spazio $\mathbb{R}^3$, anche all'interno dell'insieme delle matrici possono essere introdotte le operazioni di *somma* e *prodotto per scalari*.

Assegnate due matrici A e B aventi la stessa dimensione, diciamo $m \times n$, la loro *somma* è la matrice $A + B$, avente anch'essa dimensione $m \times n$, i cui elementi si ottengono sommando le coppie di elementi che occupano la stessa posizione nelle matrici addendi. Un esempio chiarirà immediatamente la definizione; date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

la loro somma si calcola come segue:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+7 & 4-2 \\ 6+1 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il *prodotto* di una matrice A, avente dimensione $m \times n$, per lo *scalare* k è la matrice $k \cdot A$, ancora di dimensione $m \times n$, i cui elementi si ottengono moltiplicando ciascun elemento di A per il numero k. Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

moltiplicata per lo scalare $k = 3$, dà per risultato la matrice:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}.$$

In questa sede non ci dilunghiamo ulteriormente sulle due operazioni presentate, limitandoci ad osservare che valgono le solite proprietà (si riveda la Parte I).

L'operazione matematica che permette di comprendere la vera potenzialità di quelle che apparentemente sembrano delle mere tabelle di numeri è il *prodotto tra matrici*. Cominciamo col dire che due matrici A e B possono essere moltiplicate tra loro per dare la nuova matrice $A \cdot B$ solo sotto la condizione che